Twierdzenie Riesza-Thorina i zasady maksimum

Agnieszka Kałamajska

MaTe Ciche 2022

Zanim przejdziemy do problemu...

I. Przestrzeń Banacha

X - przestrzeń liniowa z normą : $\|.\|_X$ t, że

$(X, \|.\|_X)$ - jest przestrzenią zupełną :

Każdy ciąg Cauchy'ego $\{x_n\}_{n\in N}$: $x_n \in X$

$\{$ $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

jest zbieżny do elementu $x \in X$

$\{$ tzn $x_n \to x$ i $x \in X$

Przykład : (X, μ) - przestrzeń z miarą,

$L^p(X, \mu)$ - jest przestrzenią zupełną.

II. Problem w teorii interpolacji (nieprecyzyjnie).

Dane są cztery przestrzenie Banacha : X_0, X_1 i Y_0, Y_1

2

- $S \subseteq X_0 \cap X_1$ – gęsta przestrzeń

{ np. funkcje proste w przestrzeniach L^p.

- operator liniowy $T: S \to Y_0 \cap Y_1$ taki, że

$$(*) \quad \begin{aligned} \|Ts\|_{Y_0} &\leq C_0 \|s\|_{X_0} \\ \|Ts\|_{Y_1} &\leq C_1 \|s\|_{X_1} \end{aligned} \qquad \forall_{s \in S}.$$

Niech X_t będzie (w jakimś sensie) { nie precyzujemy dokładnie

"przestrzenią pośrednią" pomiędzy X_0 i X_1,

gdzie $t \in [0,1]$, tzn. mamy skalę przestrzeni, $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$ t, że X_0 i X_1 – to przestrzenie końcowe.

Analogicznie Y_t to (w analogiczny sposób) przestrzeń "pośrednia" pomiędzy Y_0 i Y_1.

<u>Pytanie 1:</u> Kiedy z warunku $(*)$ możemy wywnioskować, że

$$\|Ts\|_{Y_t} \leq C_t \cdot \|s\|_{X_t} \qquad \forall_{s \in S} \quad ?$$

ze stałą C_t nie zależną od s?

{ dla $t \in \{0, 1\}$ to jest warunek $(*)$.

Pytanie 2: Jak precyzyjnie dopasować przestrzenie pośrednie?

{ Tym się zajmuje teoria interpolacji: między innymi jest interpolacja zespolona i rzeczywista.

III. Funkcje holomorficzne i twierdzenie Hadamarda o trzech prostych.

Przypomnienie: Dany jest zbiór otwarty $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i funkcja holomorficzna: $f: \Omega \to \mathbb{C}$

{ f zn $\forall_{z_0 \in \Omega}$ $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$

istnieje i nie zależy od wyboru ciągów $\underset{h \in \mathbb{C}}{h \to 0}$.

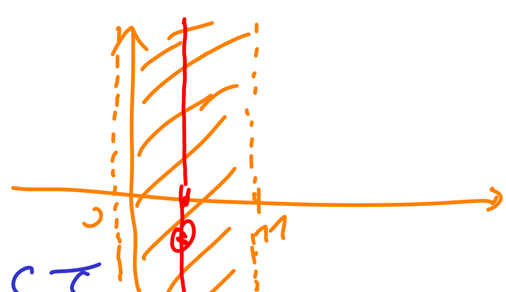
To bardzo silny warunek! Nie wystarczy istnienie pochodnych kierunkowych f w punkcie z_0.

Lemat 1 (twierdzenie Hadamarda o trzech prostych).

Niech $F: S \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną zadaną na otwartym pasku

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{re} z < 1\},$$

ciągłą i ograniczoną na domknięciu S, $\bar{S}$.



Jeśli $|F(z)| \le B_0$ na prostej $\operatorname{re} z = 0$

oraz $|F(z)| \le B_1$ na prostej $\operatorname{re} z = 1$

wówczas

$$|F(z)| \le B_0^{1-\theta} \cdot B_1^{\theta} \quad \text{na prostej } \operatorname{re} z = \theta,$$

dla każdego $\theta \in (0,1)$.

IV: Zastosowanie w teorii interpolacji i twierdzenie Riesza–Thorina.

Twierdzenie 1 (Riesz–Thorin): Niech (X,μ) i (Y,ν) będą przestrzeniami mierzalnymi, T – będzie liniowym operatorem zadanym na funkcjach prostych na X, o wartościach w zbiorze funkcji ν-mierzalnych określonych na Y.

{ Np: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n$
ν, μ – to miary Lebesgue'a.
T: (funkcje proste) $\to$ (funkcje mierzalne) }

Załóżmy, że:

- $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$
- oraz istnieją stałe M_0, M_1 t, że

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} \le M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)},$$

$$\|Tf\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} \le M_1 \|f\|_{L^{q_1}(X,\mu)}$$

dla wszystkich funkcji prostych (μ-mierzalnych) f na X.

Wówczas dla wszystkich $0<\Theta<1$ mamy

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq M_0^{1-\Theta} M_1^{\Theta} \|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

dla wszystkich funkcji prostych f na X (μ-mierzalnych), gdzie

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0}\cdot(1-\Theta) + \frac{1}{p_1}\cdot\Theta, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_0}\cdot(1-\Theta) + \frac{1}{q_1}\cdot\Theta.$$

W szczególności (argument gęstości): operator T ma jednoznaczne rozszerzenie do ograniczonego operatora:

$$\overline{T}: L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu).$$

Informacje o dowodzie:

- Liczbę zespoloną a zapisujemy w postaci trygonometrycznej

$$a = \boxed{|a|}\,\boxed{e^{i\alpha}}$$

$$= \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$|a| = \left((\operatorname{re} a)^2 + (\operatorname{im} a)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Rozważamy dwie funkcje proste (zapisane w postaci trygonometrycznej)

(1) $$f := \sum_{k=1}^{m} \underbrace{a_k \cdot e^{i\alpha_k}}_{\text{postać trygonometryczna}} \cdot \chi_{A_k}$$

(2) $$g := \sum_{j=1}^{n} \overbrace{b_j \cdot e^{i\beta_j}} \cdot \chi_{B_j}$$

- definiujemy:

$$P(z) := \frac{p}{p_0} \cdot (1-z) + \frac{p}{p_1} \cdot z, \qquad Q(z) := \frac{q'}{q_0'} \cdot (1-z) + \frac{q'}{q_1'} \cdot z$$

Kluczowe: $P(\underset{z=0}{0}) = 1$, $Q(0) = 1$

- rozszerzamy definicje f i g w (1) i (2):

(1') $$f_z := \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} \cdot e^{i\alpha_k} \cdot \chi_{A_k}$$ $\{ P(z)$ - zamiast 1

(2') $$g_z := \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_k} \cdot \chi_{B_k}$$ $\{ Q(z)$ - zamiast 1

Kluczowe: $f_0 = f$, $g_0 = g$.

{ dygresja: dla $c > 0$ $$c^z = e^{\ln(c^z)} \overset{\text{ważne}}{=} e^{z \cdot \ln c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z \cdot \ln c)^n}{n!}$$

- stąd wnioskujemy, że funkcja

$$z \mapsto F(z) := \int_Y (Tf_z)(y) \cdot g_z(y) \, d\nu(y)$$

jest holomorficzne.

- do niej stosujemy tw. Hadamarda o trzech prostych.
- Wykorzystujemy oszacowania na brzegach paska:

$$|F(z)|_{\mathrm{re}\, z=0} \leq M_0 \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}} \cdot \|g\|_{q'}^{q'/q_0'} =: \beta_0$$

$$|F(z)|_{\mathrm{re}\, z=1} \leq M_1 \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}} \cdot \|g\|_{q'}^{q'/q_1'} =: \beta_1$$

{ rachunki...

{ Skracamy zapis $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X,\mu)}$
$\|g\|_{q'} = \|g\|_{L^{q'}(Y,\nu)}$

! Stąd: dla $z=\Theta$ (a nawet na całym pasku: $\mathrm{Re}\, z = \Theta$):

$$\sup_{\substack{g_\Theta \in L^{q'}(Y,\nu) \\ \|g_\Theta\|_{q'} \leq 1}} \left| \int_Y (Tf_\Theta)(x)\, g_\Theta(x)\, d\nu(x) \right| = \bullet$$

$f_\Theta \uparrow f$, $g_\Theta \uparrow g$

$$\leq \beta_0^{1-\Theta} \beta_1^{\Theta} \leq M_0^{1-\Theta} M_1^{\Theta} \|f_\Theta\|_p$$

$$\bullet = \sup_{\substack{g \in L^{q'}(Y,\nu) \\ \|g\|_{q'} \leq 1}} \left| \int_Y \boxed{Tf(x)}\, g(x)\, d\nu(x) \right| =$$

↑ formuła dualna

$$= \|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p$$

To jest teza twierdzenia. $\square$

! Skorzystaliśmy z formuły na dualność norm:

$$(**) \qquad \|h\|_{L^q(Y,\nu)} = \sup_{\substack{g \in L^{q'}(Y,\nu) \\ \|g\|_{q'} \leq 1}} \left| \int_Y h \cdot g \, d\nu \right|$$

Dlaczego zachodzi taka formuła?

bo

$$\left| \int_Y h g \, d\nu \right| \leq \|h\|_{L^q} \|g\|_{q'} \leq \|h\|_{L^q} \quad \text{- zawsze.}$$

Biorę $g := |h|^{q-2} \cdot h$, $\quad |g|^{q'} = |h|^{\frac{q}{q-1} \cdot (q-1)} = |h|^q \in L^1$

$$\Rightarrow g \in L^{q'}. \qquad \|g\|_{q'} = \|h\|_q^{q/q'} = \|h\|_q^{q-1}$$

Normujemy g: $\quad \tilde{g} := \dfrac{g}{\|g\|_{q'}} = \dfrac{g}{\|h\|_q^{q-1}}$

$$\left| \int h \tilde{g} \, d\nu \right| = \frac{1}{\|h\|_q^{q-1}} \cdot \left| \int_Y |h|^q \, d\nu \right| = \frac{\|h\|_q^q}{\|h\|_q^{q-1}} = \|h\|_q$$

$\Rightarrow$ Prawa = Lewej.

Stąd formuła dualna.

Pytanie: Czy zamiast przestrzeni L^q, L^p można było użyć innych przestrzeni?

Ogólnie tak. Podobne metody zadziałają, jeśli zamiast przestrzeni L^q użyjemy Y t, że $g \in Y'$, Y, Y' - zawierają f-cje proste i

$$\|h\|_Y = \sup_{\substack{g \in Y' \\ \|g\|_{Y'} \leq 1}} \left| \int_Y h \cdot g \, d\nu \right|$$ - formuła dualna

Różne warianty tw. Riesza-Thorina są obiektem badań...

Dziękuję bardzo za uwagę!