Nierówności | 3 Nierówność Hardy'ego ①

I. Nierówność Hilberta z początku 20-go wieku.

Schur → z najlepszą stałą 1911

Tw (Nierówność Hilberta, wersja najbardziej klasyczna, 1906).

Jeśli $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$, $a_n, b_m \geqslant 0$ to

Szereg podwójny: $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ ~~[illegible]~~ jest zbieżny,

co więcej:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)$$

Co więcej, π jest najlepszą stałą w powyższej nierówności

Bardziej ogólna wersja nierówności Hilberta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ [illegible]

Wielu znakomitych matematyków pracowało nad nierównością typu Hilberta (Weyl, Wiener, Fejér, Riesz, Szegö, Polya i Hardy). Wielka tocyła się o stole.

Przy okazji Hardy wymyślił taką nierówność (1919)

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \le 4 \sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

gdzie $A_n = a_1 + \dots + a_n$, czyli

$\frac{A_n}{n}$ to ciąg średnich arytmetycznych.

{ dowód jest prosty ale zajmuje trochę czasu, więc go pominiemy.

Zastanówmy się jak by wyglądała ciągła wersja tej nierówności.

$A_n = a_1 + \dots + a_n$ to suma, więc $\int_{\{1,\dots,n\}} f(x)\,d\mu$

μ - miara liczące, $\frac{1}{n}$ to $\mu(\{1,2,\dots,n\})$,

zatem $A_n = \frac{1}{\mu(\{1,\dots,n\})} \int_{\{1,\dots,n\}} f\,d\mu$,

ciągły odpowiednik to byłby $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \approx \frac{A_n}{n}$

Nierówności 3

definy zamiast $N \to \infty$

Dalej $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2$ odpowiada $\int_0 \left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 dx$

$F'(x)=f$

~~$\sum_{n=1}^{N} A_n^2$ odpowiada $\int_0^x f^2(\tau)\,d\tau$~~

$F(0)=0$, lub inaczej

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(\tau)\,d\tau \right)^2 dx$$

Prawa odpowiada $\int_0^\infty f^2(\tau)\,d\tau$.

Dyskretną nierówność identyfikujemy z jej ciągłą wersją:

$$(1) \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(\tau)\,d\tau \right)^2 dx \leq C \int_0^\infty f^2(\tau)\,d\tau$$

i to jest najbardziej prymitywna wersja nierówności Hardy'ego

Uwaga: Postawiając
$f(\tau) = \{ a_{n+1}, \ \tau \in [n, n+1)$, a_j - ciąg

- funkcję schodkową dostajemy wersję dyskretną.

Hardy najpierw udowodnił ~~[illegible]~~ (1) w 1919 roku, potem zmodyfikował do nierówności (1920-25),

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \cdot \int_0^\infty f(t)^p\,dt$$

z najlepszą stałą $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

W wersji bardziej zmodyfikowanej zastąpił miarę dx przez ~~[illegible]~~ $x^\alpha dx$.

W międzyczasie znaleziono kilka dowodów nierówności Hardy'ego, opowiemy o dwóch przykładach, gdyż każde metody stanowią wypustkę do innych badań.

Uwaga: Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\int_0^x |f(t)|\,dt < \infty$ $\forall x$. ~~Funkcję~~ Funkcję

$$\mathcal{H}f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$ nazywamy transformatą Hardy'ego funkcji f.

Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\int_R^\infty |f(t)|\,dt < \infty$ to

Nierówności | 3

funkcję

$$\mathcal{H}^*f(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt$$

nazywamy sprzężoną transformatą Hardy'ego funkcji f.

Tw (nierówność Hardy'ego): Jeśli $p \geq 1$, $\alpha < p-1$ to dla dowolnej funkcji borelowskiej $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

(H)
$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^p x^\alpha\,dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p x^\alpha\,dx.$$

{ Przedstawimy d-d na dwa sposoby }

D-d

I. Sposób, dowód Inghama { nie bardzo wiadomo z którego roku, przypadek $\alpha = 0$ można znaleźć w książce Hardy, Littlewood, Pólya: "Inequalities" ze wzmianką że to pokazał Ingham.

Nierówność | 3

Zauważmy, że

zam. zmiennych

$$\cancel{\ldots}\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(sx)\,ds$$

(2)

$t = sx$, $s \in (0,1)$

$dt = x\,ds$

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \right)^p x^\alpha\,dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$x^\alpha = \left(x^{\frac{\alpha}{p}}\right)^p$$

$$= \Big\| \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt}_{(2)} \cdot x^{\frac{\alpha}{p}} \Big\|_{L^p(0,\infty)} =$$

$$= \Big\| \int_0^1 f(xs)\,ds \cdot x^{\frac{\alpha}{p}} \Big\|_{L^p(0,\infty)} =$$

$$= \Big\| \int_0^1 f(xs)\cdot x^{\frac{\alpha}{p}}\,ds \Big\|_{L_p(0,\infty)}$$

$$\overset{M}{\leq} \int_0^1 \| f(xs)\, x^{\frac{\alpha}{p}} \|_{L_p(0,\infty)}\,ds$$

I ~~[illegible]~~ ← Nierówność Minkowskiego

Dygresja: przypomnijmy nierówność Minkowskiego

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \int_Y \left(\int_X (f(x,y))^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

$$\text{Lewe} = \Big\| \underbrace{\int_Y f(\bullet, y)\,d\nu(y)}_{\text{jako f-cja zmiennej } x \text{ wstawionej w } \bullet} \Big\|_{L^p(\mu)}$$

$$\text{Prawe} = \int_Y \| f(\cdot, y) \|_{L^p(\mu)}\, d\nu(y)$$

Nierówność mówimy jako

$$\left\| \left(\int_Y f \, d\nu(y)\right)\right\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \| f \|_{L^p(\mu)}\, d\nu(y)$$

" $\| \int \| \leq \int \| \, \|$ " - tak to pamiętamy

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(xs)^p x^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{p}} ds =$$

podstawmy: $xs = y \qquad dx = \frac{1}{s} dy$

$x^\alpha = (xs)^\alpha s^{-\alpha}$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^\infty f(y)^p y^\alpha \, dy \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot s^{-\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{p}} ds$$

wewnętrzne wyrażenie nie zależy od s

$$= \left(\int_0^\infty f(y)^p y^\alpha \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\int_0^1 s^{-\frac{\alpha}{p} - \frac{1}{p}} ds}_{= \underbrace{\frac{p}{p-\alpha-1}}}$$

i to jest właśnie ta stała

$\square$

Pochwała: Dowód jest dość szybki, ~~[illegible]~~

Krytyka: bardzo korzysta z jednorodności występujących miar, nie da się łatwo przedstawić, ale można...

~~Dowód~~

II sposób : Dowód Hardy'ego {

Dowód w krokach

Krok 1 : Dowodzimy:

$$(3)\quad \mathcal{H}f(x) = \int_0^x f(t)\,dt \le x^{\frac{(p-\alpha-1)}{p}} \int_0^x f(t)^p t^\alpha\,dt$$

D-d :

$$\int_0^x f\,dt = \int_0^x f \cdot t^{\frac{\alpha}{p}} \cdot t^{-\frac{\alpha}{p}}\,dt \le$$

Hölder

$$\left(\int_0^x (f^p t^\alpha dt\right)^{1/p} \cdot \underbrace{\int_0^x t^{-\frac{\alpha}{p}\frac{p}{p-1}}\,dt}_{\int_0^x t^{-\frac{\alpha}{p-1}}\,dt}$$

a to jest wtedy x w odpowiedniej potędze.

całka jest zbieżna o ile $\frac{\alpha}{p-1} < 1$, $\alpha < p-1$

Nierówności | 3 | (10)

Krok 2: ~~Dla~~ ~~supp f ⊆ [~~ Nierówność (H) zachodzi ~~dla~~ przy dodatkowym założeniu

$$\operatorname{supp} f \subseteq \left[\tfrac{1}{N}, N\right], \quad N > 0.$$

D-d kroku 2: Dla f - gładkiej - szczegóły zostawiamy

$$\int_0^\infty \underbrace{(\mathcal{H}f(x))^p}_{F} \underbrace{x^{\alpha-p}}_{} dx = \int FG' =$$

$$x^{\alpha-p} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{\alpha-p+1} x^{\alpha-p+1}}_{G}\Big)'$$

$$= FG - \int F'G$$

stała dla dużych x, 0 w okolicach 0

$$= \frac{1}{\alpha-p+1} x^{\alpha-p+1} (\mathcal{H}f(x))^p \Big|_0^\infty -$$

$\xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ bo $\alpha < p-1$

$$- \int p\, \mathcal{H}f(x)^{p-1} \cdot f \cdot \frac{1}{\alpha-p+1} x^{\alpha-p+1} dx$$

bo $(\mathcal{H}f)' = f$

$$= A - B = B \qquad (A = 0)$$

Mamy

$$\int_{\mathbb{R}_+} (\mathcal{H}f)^p x^{\alpha-p}\,dx \le \underbrace{\frac{p}{p-1-\alpha}}_{C_p} \int_{\mathbb{R}_+} \underset{L^p}{f} \cdot \underset{L^{p'}}{\left(\frac{\mathcal{H}f}{x}\right)^{p-1}} x^{\alpha}\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{Hölder}\\ \text{dla miary}\\ x^{\alpha}dx}}{\le} C_p \Big(\underbrace{\int \left(\frac{\mathcal{H}f}{x}\right)^{\frac{\cancel{p-1}}{1}\cdot\frac{p}{\cancel{p-1}}} \cdot x^{\alpha}\,dx}_{\text{Lewa}} \Big)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left(\int f^p x^{\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\underset{\text{Lewa}}{L} \le C_p \cdot L^{1-\frac{1}{p}} \cdot \underset{\text{prawa}}{P}^{\frac{1}{p}}$$

$$L^{\frac{1}{p}} \le C_p P^{\frac{1}{p}}$$

$$L \le C_p^p P$$

$\square$

Nierówności 3

1. Dokończyć dowód dla dowolnego f.

2. Pokazać, że stała w nierówności jest optymalna

3. Udowodnij:

Lemat: Dla dowolnych f-cji borelowskich f, g t. że $g(y) = f(y^{-1})y^{-2}$ zachodzi

$$\mathcal{H}f(y^{-1}) = \mathcal{H}^* g(y)$$

następnie korzystając z lematu i już udowodnionej nierówności Hardy'ego wykaż ~~do~~ równoważną wersję nierówności Hardy'ego:

Tw (H^*): Dla $p, \beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $p - \beta < 1$ i dowolnej funkcji borelowskiej $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^\infty (\mathcal{H}^* g(y))^p y^{\beta - p} dy \le \left(\frac{p}{\beta - p + 1}\right)^p \int_0^\infty g(y)^p y^{\beta} dy$$

* Ten wykład w dużej mierze korzystał z wniosków pana Konrada Maciejewskiego "Nierówność Hardy'ego".

(7) Udowodnij nierówność:

Tw
Dla dowolnych funkcji borelowskich $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $1 \le r < \infty$ zachodzi nierówność

$$\left(\int_0^\infty \varphi(x) \left(\mathcal{H}\psi(x) \right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le \int_0^\infty \psi(y) \left(\mathcal{H}^* \varphi(y) \right)^{\frac{1}{r}} dy$$

Uogólnienie, Luboš Pick, Studia Mathematica, 2009
– b. mało zrobione w tym kierunku